$\psi_{ik} + \tau_{ik} = c_{ui}$

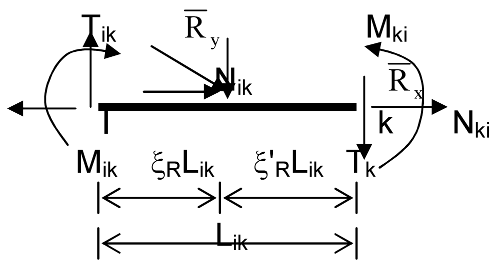
$$c_{ui} = \tau_{ik} + \frac{(v_k - v_i)\cos\alpha_{ik} - (u_k - u_i)\sin\alpha_{ik}}{l_{ik}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots z_u$$

Ukupan broj uslova kompatibilnosti pomjeranja čvorova nosača jednak je ukupnom broju elemenata nosača:

$$z_o + z_u + z_s + z_k$$

2.4. Uslovi ravnoteže nosača

Da bi napisali uslove ravnoteže nosača zamislićemo da smo kružnim presjecima isjekli sve čvorove i tome nosač rastavili na z_s nezavisnih štapova i K nezavisnih čvorova. Uticaj štapova na čvorove, i obrnuto, zamjenjujemo silama i momentima na krajevima štapova. Pod uticajem spoljašnjih sila i sila u presjecima sistem štapova i sistem čvorova su u ravnoteži.
Iz ravnoteže štapova slijedi:



Slika 8.

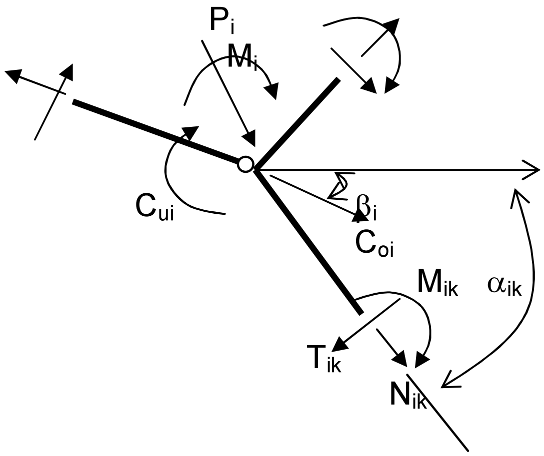
$$T_i = \overline{R}_y \xi'_R + \frac{M_k - M_i}{L}$$

$$T_k = -\overline{R}_y \xi_R + \frac{M_k - M_i}{L}$$

$$N_{ik} - N_{ki} = \overline{R}_x$$
$$N_i + N_k = 2S_{ik}$$

$$N_{ik} = S_{ik} + \overline{R}_x/2$$
$$N_{ki} = S_{ik} - \overline{R}_x/2$$

Sile na krajevima štapa prikazane su preko momenata M_{ik}, M_{ki}, sile S_{ik} i opterećenja duž ose štapa.
Na slici 9 prikazan je jedan čvor nosača u kome su neki štapovi kruto vezani a neki zglavkasto. Pored sila i momenata N, T i M na čvor djeluju i aktivna sila Pi i aktivni moment Mi, a ako je čvor oslonjen i uklješten postoje i reakcije oslonaca i reakcija uklještenja. Uslovi ravnoteže sila i momenta glase:



Slika 9.

χ= +1 ili -1

$$\Sigma N_{ik}\cos\alpha_{ik} - \Sigma T_{ik}\sin\alpha_{ik} + C_{oi}\cos\beta_i + P_{ix} = 0$$
$$\Sigma N_{ik}\sin\alpha_{ik} + \Sigma T_{ik}\cos\alpha_{ik} + C_{oi}\sin\beta_i + P_{iy} = 0$$
$$\Sigma\chi_{ik}M_{ik} + C_{ui} + M_i = 0$$

$$\Sigma S_{ik}\cos\alpha_{ik} - \Sigma\frac{M_{ki}-M_{ik}}{l_{ik}}\sin\alpha_{ik} + C_{oi}\cos\beta_i + H_i = 0$$
$$\Sigma S_{ik}\sin\alpha_{ik} + \Sigma\frac{M_{ki}-M_{ik}}{l_{ik}}\cos\alpha_{ik} + C_{oi}\sin\beta_i + V_i = 0 \quad \text{.................. 2K}$$
$$\Sigma\chi_{ik}M_{ik} + C_{ui} + M_i = 0 \quad \text{...m}$$

Ukupan broj uslova ravnoteže:

Σur= 2K+m

Zaključujemo da je ukupan broj uslova pomjeranja i uslova ravnoteže:

z_o + z_u + z_s + z_k + m + 2K

i da je jednak broju osnovnih statičkih i deformacijskih nepoznatih. U ovim jednačinama pored nepoznatih reakcija C_{oi} i C_{ui} (z_o+z_u), nepoznatih sila S_{ik} (z_s), nepoznatih momenata M_{ik} , M_{ki} (zk +m) i 2K nepoznatih pomjeranja u_i i v_i , figurišu još i nepoznate deformacijske veličine štapova, promjene dužine tetive štapova Δl_{ik} i deformacioni uglovi τ_{ik} i τ_{ki}. Ove čiste deformacijske veličine mogu da se izraze preko statički nezavisnih veličina tog štapa :

$$\Delta l_{ik} = \int_i^k \varepsilon\, dx \qquad \varepsilon = \frac{N}{EF} + \alpha_t t \qquad N_c = S_{ik} + N_{c,o}$$

$$\tau_{ik} = \frac{1}{l_{ik}}\int_i^k (\xi' l_{ik}\chi - \varphi_T)dx \qquad \chi = \frac{M}{EI} + \alpha_t\frac{\Delta t}{h} \qquad M_c = M_i\xi_c' + M_k\xi_c + M_{c,o}$$

$$\tau_{ki} = -\frac{1}{l_{ik}}\int_i^k (\xi l_{ik}\chi + \varphi_T)dx \qquad \varphi_T = k\frac{T}{GF} \qquad T_c = \frac{M_k - M_i}{l_{ik}} + T_{c,o}$$

Iz svega rečenog slijedi da u statici linijskih nosača prvo treba riješiti jedan problem sa konačnim brojem nepoznatih, pa tek onda odrediti funkcije koje daju informaciju o rasporedu unutrašnjih sila i deformaciji čitavog sistema. Prvi dio zadatka je složeniji jer se njime rešava problem kao cjeline, dok se u drugom dijelu zadatka, na osnovu prethodno sračunatih podataka, unutrašnje sile i deformacije određuju za svaki štap posebno i nezavisno.
Rješenje prvog zadatka se svodi na veliki broj simultanih linearnih jednačina sa velikim brojem nepoznatih. Formiranje ovog sistema jednačina dugotrajno je i zametno, osim za jednostavnije oblike nosača. Stoga ćemo se truditi da cjelokupni sistem jednačina razbijemo na što veći broj međusobno nezavisnih sistema jednačina sa manjim brojem nepoznatih, i u krajnjoj liniji pokušati da formiramo sistem jednačina od kojih svaka sadrži po jednu nepoznatu.
Treba napomenuti da su sve jednačine statike linijskih nosača prvog reda linearne i zbog toga se ova teorija naziva i linearnom statikom konstrukcija. Iz linearnosti problema slijede i važni zaključci:

- u linearnoj teoriji rješenja su jednoznačna
- u linearnoj teoriji važi princip superpozicije uticaja.

2.5. Klasifikacija nosača

2.5.1. Kinematička klasifikacija nosača

Da bi jedan sistem štapova mogao da bude nosač, potrebno je da ima nepomjerljivu konfiguraciju, odnosno, da bude stabilan. Čvorovi takvog sistema ne mogu da se pomjeraju a da se pri tom štapovi ne deformišu, ne pomjeri ni jedan oslonac, ili ne obrne ni jedno uklještenje. Nosači, sistemi štapova, čiji čvorovi mogu da se pomjere bez deformacija štapova, pomjeranja oslonaca ili obrtanja ukliještenja nazivamo kinematički labilnim sistemima. Ovi sistemi predstavljaju mehanizme koji ne mogu biti nosači građevinskih konstrukcija.
Analitički kriterijum kinematičke stabilnosti nosača dobijamo poredeći broj uslova kompatibilnosti pomjeranja sa brojem nepoznatih pomjeranja. Kada je broj uslova kompatibilnosti jednak broju komponentalnih pomjeranja čvorova 2K :

$$z_o + z_u + z_s + z_k = 2K \tag{1}$$

i kada su svi uslovi međusobno nezavisni, tj kada je determinanta uslova kompatibilnosti različita od nule:

$$D \neq 0 \tag{2}$$

tada iz ovih uslova mogu jednoznačno da se odrede komponentalna pomjeranja u i v ako su poznate deformacijske veličine Δl i τ, pomjeranja oslonaca i obrtanja ukliještenja. Kada se štapovi ne deformišu $\Delta l=0$ i $\tau=0$, ukliještenja ne obrću i oslonci ne pomjeraju c=0, tada ove jednačine imaju samo trivijalno rješenje u=v=0.
Stabilni su oni sistemi koji zadovoljavaju uslove (1) i (2).

Stabilni su i oni sistemi kod kojih je broj uslova kompatibilnosti pomjeranja čvorova veći od ukupnog broja komponentalnih pomjeranja čvorova u i v, tj kada je:

$$z_o + z_u + z_s + z_k > 2K \tag{3}$$

i ako među njima postoji makar 2k međusobno nezavisnih uslova.

Saglasno (1), (2) i (3) slijedi da je analitički uslov za kinematičku stabilnost jednog nosača, ili sistema štapova, da rang matrice uslova kompatibilnosti pomjeranja bude jednak dvostrukom broju čvorova:

$$R(z_o + z_u + z_s + z_k) = 2K \tag{4}$$

Prosto stabilan sistem štapova je onaj sistem štapova kod koga je broj elemenata jednak dvostrukom broju čvorova

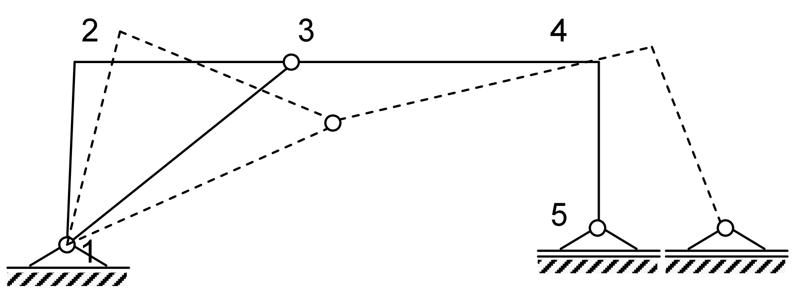
Višestruko stabilan sistem štapova je onaj sistem štapova kod koga je broj elemenata veći od dvostrukog broja čvorova, sa viškom elemenata Σuk-2K. Iz ovakvog sistema moguće je ukloniti Σuk-2K elemenata a da on i dalje ostane stabilan.

Svi ostali sistemi štapova su *kinematički labilni*:

$$R(z_o + z_u + z_s + z_k) < 2K \tag{5}$$

U jednom labilnom sistemu štapova razlika 2K – R(Σuk) predstavlja broj pomjeranja koji se mogu izabrati proizvoljno i međusobno nezavisno , a da svi uslovi kompatibilnosti pomjeranja budu zadovoljeni, odnosno, predstavlja broj stepeni slobode pomjeranja tog sistema.

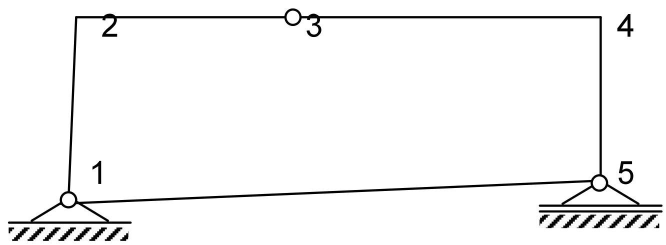
Uslov da relacije (1) i (3) predstavljaju potreban ali ne i dovoljan uslov kinematičke stabilnosti prikazaćemo na primjeru datom na slici 10. Za sisteme koji mogu ostvariti konačna pomjeranja kažemo da imaju nedovoljno elemenat ili *nepravilan raspored elemenat*. Sistem dat na slici 10 izveden iz početne konfiguracije ostaje labilan.



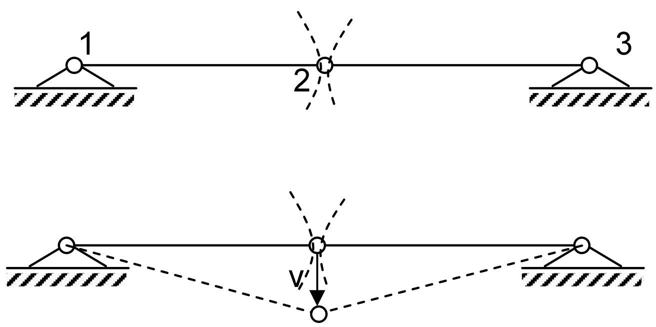
K=5
z_s=5
z_k=2
z_o=3
z_u=0
Σz=10, 2K=10
10=10

Slika 10.

Uslov $\Delta l_{13}=0$, odnosno, uslov da se čvorovi 1 i 3 ne pomjeraju, već je sadržan u uslov $\tau_{2,1} + \psi_{2,1} = \tau_{2,3} + \psi_{2,3}$. Element koji je suvišan u vezi čvorova 1, 2 i 3 nedostaje u vezi čvorova 3, 4 i 5. Ako se štap 1-3 stavi u položaj 1-5 sistem je stabilan:



Za sisteme koji mogu ostvariti samo beskonačno mala pomjeranja kažemo da imaju *kritičnu konfiguraciju*. Ovi sistemi nakon ostvarenog beskonačno malog pomjeranja v popstaje stabilan, jer se dalja pomjeranja mogu ostvariti samo ako se štapovi deformišu (slika 11.).



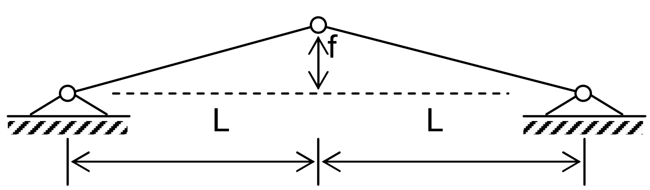
$$\Delta L = L\left(\frac{1}{\cos\varphi} - 1\right)$$

$$\Delta L \cong \frac{1}{2} L\varphi^2$$

$$v_2 = L\varphi$$

Slika 11.

I ako sistemi sa kritičnom konfiguracijom mogu da imaju samo beskonačno mala pomjeranja bez deformacije svojih elemenata, oni ne mogu da budu nosači građevinskih konstrukcija. Za nosače građevinskih konstrukcija nepovoljno je i ako je za nosač oblika datog na slici pri čemu je: $f/L \ll 1$

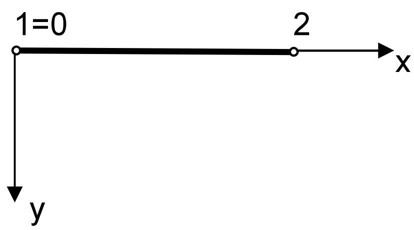


Pravilni zaključci o unutrašnjim silama i deformacijama sistema čija je konfiguracija bliska kritičnoj konfiguraciji mogu da se dobiju samo na osnovu teorije velikih deformacija.

2.5.1. 1. Unutrašnja kinematička stabilnost sistema

Kada iz jednog kinematički stabilnog sistema uklonimo sve spoljašnje elemente, tada dobijamo sistem međusobno vezanih štapova čiji čvorovi ili mogu relativno

da se pomjeraju a da se nijedan štap ne deformiše (unutrašnje kinematički labilni sistemi) ili ne mogu relativno da se pomjeraju bez deformacije štapova (unutrašnje kinematički stabilni sistemi) ili se sastoje od jedne kinematički krute ploče.
Analitički kriterijum unutrašnje stabilnosti dobijamo poredeći broj uslova kompatibilnosti za relativna pomjeranja sa brojem komponentalnih pomjeranja. Kada se usvoji da se jedan od štapova sistema štapova poklapa sa x osom usvojenog koordinatnog sistema, može se napisati da su:



$u_1=v_1=v_2=0$ .... 3 uslova

Ukupan broj nepoznatih pomjeranja je 2K – 3.
Analitički kriterijum unutrašnje kinematičke stabilnosti sistema štapova:

1) $z_s + z_k = 2K - 3$ $D_1 \neq 0$, unutrašnje prosto stabilan

2) $z_s + z_k > 2K - 3$ unutrašnje višestruko stabilan sa $z_s + z_k - (2K – 3)$ suvišnih elemenata
$R(z_s + z_k) = 2K-3$

3) $z_s + z_k < 2K - 3$ unutrašnje kinematički labilan sa $(2K – 3) - z_s + z_k$ stepeni relativnih pomjeranja čvorova sistema

Unutrašnje labilni sistemi mogu biti nosači građevinskih konstrukcija, jer se elementi koji nedostaju za unutrašnju stabilnost mogu nadoknaditi spoljašnjim elementima.
Kruta ploča je sistem štapova koji je unutrašnje kinematički stabilan (višestruko ili prosto stabilan).

2.5.2. Statička klasifikacija nosača

Linijski nosač neke konstrukcije može biti onaj sistem štapova koji u granicama nosivosti materijala može da primi i na oslonce prenese proizvoljno zadate spoljašnje sile. Do analitičkog kriterijuma o statičkoj klasifikaciji, odnosno, do zaključka o tome da li jedan sistem štapova može da uravnoteži proizvoljno opterećenje, dolazimo poređenjem broja statički nepoznatih veličina sa brojem uslova ravnoteže.
Na raspolaganju nam stoji 2K +m jednačina ravnoteže sa nepoznatim:

C_{oi} ....z_o
C_{ui} ....z_u
S_{ik} ....z_s
M_{ik} , M_{ki} ....$z_k + m$

Ukupan broj statički nepoznatih je jednak zbiru:

$\Sigma_{sn} = z_o + z_u + z_s + z_k + m$

Ukupan broj uslova ravnoteže je:

$\Sigma_{ur} = 2K + m$

Kada je:

1) $z_o + z_u + z_s + z_k + m = 2K + m$ i $D' \neq 0$ .....statički određen sistem štapova

postoje jednoznačna rješenja, i sile u presjecima i reakcije oslonaca su jednake nuli ako je štap neopterećen. Ako se uporede statička i kinematička klasifikacija zaključuje se da su:

statički određeni nosači ↔kinematički prosto stabilni

2) $z_o + z_u + z_s + z_k + m > 2K + m$ .....statički neodređen sistem štapova

Uslovi ravnoteže mogu biti zadovoljini za proizvoljne vrijednosti spoljašnjeg opterećenja. Ako se uporede statička i kinematička klasifikacija zaključuje se da su:

statički neodređeni nosači ↔kinematički višestruko stabilni

Razlika $\Sigma_{sn} - \Sigma_{ur} = (z_o + z_u + z_s + z_k + m) - (2K + m)$ predstavlja broj nepoznatih spoljašnjih ili unutrašnjih sila i momenata, koji mogu proizvoljno da se izaberu i da uslovi ravnoteže ostanu zadovoljeni. Te veličine nazivamo statički nezavisne ili statički neodređene veličine. Reakcije oslonaca, momenti uklještenja i sile u presjecima statički neodređenih nosača mogu da postoje i kada je nosač noepterećen. Takva stanja jednog nosača nazivamo unutrašnja ravnotežna stanja nosača.

3) $z_o + z_u + z_s + z_k + m < 2K + m$ .....statički preodređen sistem štapova

Da bi ovaj sistem bio u ravnoteži spoljašnje sile moraju da zadovolje onoliko uslova koliko sistem ima stepeni slobode pomjeranja. Ako se uporede statička i kinematička klasifikacija zaključuje se da su:

statički preodređeni nosači ↔kinematički labilni

3. PRINCIP VIRTUALNIH POMJERANJA I PRINCIP VIRTUALNIH SILA

3.1. Moguće ravnotežno stanje i moguće stanje deformacije nosača

U prethodnim poglavljima izveli smo sljedeče veze:
-uslovi ravnoreže elementa štapa:

$$\begin{aligned} &dH+p_x dy=0 \\ &dV+p_y dx=0 \\ &dM+Hdy-Vdx=0 \end{aligned} \qquad (1)$$

-uslovi ravnoteže čvorova nosača:

$$\begin{aligned} &\Sigma N_{ik}\cos\alpha_{ik} - \Sigma T_{ik}\sin\alpha_{ik} + C_{oi}\cos\beta_i + P_{ix} = 0 \\ &\Sigma N_{ik}\sin\alpha_{ik} + \Sigma T_{ik}\cos\alpha_{ik} + C_{oi}\sin\beta_i + P_{iy} = 0 \\ &\Sigma\chi_{ik} M_{ik} + C_{ui} + M_i = 0 \end{aligned} \qquad (2)$$

-veze pomjeranja, obrtanja ideformacijskih veličina štapova:

$$\begin{aligned} &du=\varepsilon\, dx-\varphi\, dy \\ &dv=\varepsilon\, dy+\varphi\, dx \\ &d(\varphi-\varphi_t)=-\chi ds \end{aligned} \qquad (3)$$

-uslovi kompatibilnosti pomjeranja čvorova:

$$\begin{aligned} &(u_k-u_i)\cos\alpha_{ik}+(v_k-v_i)\sin\alpha_{ik}=\Delta l_{ik} \\ &\frac{(v_k-v_i)\cos\alpha_{ik}-(u_k-u_i)\sin\alpha_{ik}}{l_{ik}} - \frac{(v_r-v_i)\cos\alpha_{ir}-(u_r-u_i)\sin\alpha_{ir}}{l_{ir}} = \tau_{ir}-\tau_{ik} \\ &u_i\cos\beta i + v_i\sin\beta i = c_{oi} \\ &c_{ui} = \tau_{ik} + \frac{(v_k-v_i)\cos\alpha_{ik}-(u_k-u_i)\sin\alpha_{ik}}{l_{ik}} \end{aligned} \qquad (4)$$

u kojima je:

$$\begin{aligned} &\tau_{ik} = \frac{1}{L_{ik}}\int_i^k (\xi' L_{ik}\chi - \varphi_T)dx \\ &\tau_{ki} = -\frac{1}{L_{ik}}\int_i^k (\xi L_{ik}\chi + \varphi_T)dx \\ &\Delta L_{ik} = \int_i^k \varepsilon dx \end{aligned} \qquad (5)$$

-Veze deformacijskih veličina, sila u presjecima i temperaturnih promjena u teorije elestičnosti date su Hooke-ovim zakonom:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{N}{EF} + \alpha_t t \\ \chi &= \frac{M}{EI} + \alpha_t \frac{\Delta t}{h} \\ \varphi_t &= \frac{kT}{GF} \end{aligned} \qquad (6)$$

Broj integracionih konstanti jednačina (1) i (3), odnosno, broj statičkih i deformacijskih veličina, jednak je broju uslova (2) i (4) iz kojih se mogu jednoznačno odrediti. Međutim, to nije uvijek tako jednostavno i često se problemi Statike ne mogu na ovaj način sa uspjehom riješiti. Tada se umjesto jednačina (1) i (3) koriste dva ekstremalna principa kojima te jednačine mogu da se zamijene. Da bi te principe definisali potrebno je definisati dva pojma: *moguće ravnotežno stanje i moguće stanje deformacija*.

Moguće ravnotežno stanje nosača *opterećenog raspodijeljenim silama* p_x *i* p_y*, koncentrisanim silama* P_i *i koncentrisanim momentima* M_i *je svaki sistem reakcija* C_{oi} *i* C_{ui} *i sila u presjecima N, T, M koje zadovoljavaju uslove ravnoteže elemenata (1) svih štapova i uslove ravnoteže (2) svih čvorova.*

Kada je zadatak statički određen tada za dato opterećenje postoji samo jedan sistem reakcija i sila u presjecima, odnosno, postoji samo jedno moguće ravnotežno stanje. Kada je nosač statički neodređen za dato opterećenje postoji više sistema reakcija i sila u presjecima koje zadovoljavju jednačine (1) i (2), tj. postoji više mogućih ravnotežnih stanja. Stvarno stanje je samo jedno moguće stanje.

Moguće stanje deformacije nosača *je svaki sistem jednačina* χ, ε, φ_T*, pomjeranja* c_{oi} *i obrtanja* c_{ui} *kome saglasno jednačinama (5) i odgovaraju deformacijske veličine štapova* Δl_{ik} *i* τ_{ik}*, tako da postoje obrtanja* φ *i pomjeranja u i v koja zadovoljavaju sve uslove kompatibilnosti pomjeranja čvorova (4).*

Kada je nosač statički određen odnosno kinematički prosto stabilan broj uslova kompatibilnosti jednak je broju pomjeranja čvorova i za proizvoljne vrijednosti c_{oi}, c_{ui}, Δl_{ik} i, τ_{ik}, odnosno, χ, ε, φ_T mogu se odrediti pomjeranja koja zadovoljavaju uslove. Kada je nosač statički neodređen odnosno kinematički višestruko stabilan broj uslova kompatibilnosti je veći od broja pomjeranja čvorova i svi ti uslovi mogu biti zadovoljeni samo za određene vrijednosti c_{oi}, c_{ui}, Δl_{ik} i, τ_{ik}, odnosno, χ, ε, φ_T.

3.2. Veza mogućih ravnotežnih stanja i mogućih satnja deformacije- princip virtualnih pomjeranja i princip virtualnih sila

Neka je dat statički određeni ili statički neodređen proizvoljan nosač i dva stanja

u tom nosaču:
moguće ravnotežno stanje

$$\tilde{p}_x, \tilde{p}_y, \tilde{P}_i, \tilde{M}_i$$
$$\tilde{C}_{oi}, \tilde{C}_{ui}, \tilde{H}, \tilde{V}, \tilde{M}$$

moguće stanje deformacija

$$\tilde{\tilde{\chi}}, \tilde{\tilde{\varepsilon}}, \tilde{\tilde{\varphi}}_T,$$
$$\tilde{\tilde{c}}_{oi}, \tilde{\tilde{c}}_{ui}, \tilde{\tilde{u}}, \tilde{\tilde{v}}, \tilde{\tilde{\varphi}}$$

Kada uslove (1) napišemo za moguće ravnotežno stanje, pomnožimo sa pomjeranjima, saberemo i integralimo od i do k, dobijamo zbir radova spoljašnjih i unutrašnjih sila mogućeg ravnotežnog stanja na pomjeranjima i obrtanjima mogućeg stanja deformacija:

$$d\tilde{H} + \tilde{p}_x dy = 0 \qquad /\cdot \tilde{\tilde{u}}$$
$$d\tilde{V} + \tilde{p}_y dx = 0 \qquad /\cdot \tilde{\tilde{v}}$$
$$d\tilde{M} + \tilde{H}dy - \tilde{V}dx = 0 \qquad /\cdot -\left(\tilde{\tilde{\varphi}} - \tilde{\tilde{\varphi}}_T\right)$$

$$\int_i^k \left[\tilde{\tilde{u}} d\tilde{H} - \tilde{H}\left(\tilde{\tilde{\varphi}} - \tilde{\tilde{\varphi}}_T\right)dy\right] + \int_i^k \left[\tilde{\tilde{v}} d\tilde{V} + \tilde{V}\left(\tilde{\tilde{\varphi}} - \tilde{\tilde{\varphi}}_T\right)dx\right] - \int_i^k \left(\tilde{\tilde{\varphi}} - \tilde{\tilde{\varphi}}_T\right)d\tilde{M} + \int_i^k \left(\tilde{p}_x \tilde{\tilde{u}} dy + \tilde{p}_y \tilde{\tilde{v}} dx\right) = 0$$

Primijenom parcijalne integracije dobijamo:

$$\int_i^k \left[\tilde{\tilde{u}} d\tilde{H} - \tilde{H}\left(\tilde{\tilde{\varphi}} - \tilde{\tilde{\varphi}}_T\right)dy\right] = \left[\tilde{\tilde{u}}\tilde{H}\right]_i^k - \int_i^k \tilde{H}\left(d\tilde{\tilde{u}} + \tilde{\tilde{\varphi}}dy - \tilde{\tilde{\varphi}}_T dy\right)$$

$$\int_i^k \left[\tilde{\tilde{v}} d\tilde{V} + \tilde{V}\left(\tilde{\tilde{\varphi}} - \tilde{\tilde{\varphi}}_T\right)dx\right] = \left[\tilde{\tilde{v}}\tilde{V}\right]_i^k - \int_i^k \tilde{V}\left(d\tilde{\tilde{v}} - \tilde{\tilde{\varphi}}dx - \tilde{\tilde{\varphi}}_T dx\right)$$

$$-\int_i^k \left[\left(\tilde{\tilde{\varphi}} - \tilde{\tilde{\varphi}}_T\right)d\tilde{M}\right] = -\left[\left(\tilde{\tilde{\varphi}} - \tilde{\tilde{\varphi}}_T\right)\tilde{M}\right]_i^k + \int_i^k \tilde{M} d\left(\tilde{\tilde{\varphi}} - \tilde{\tilde{\varphi}}_T\right)$$

Vodeći računa o vezama (3) slijedi da je:

$$\left[-\left(\tilde{\tilde{\varphi}} - \tilde{\tilde{\varphi}}_T\right)\tilde{M} + \tilde{\tilde{u}}\tilde{H} + \tilde{\tilde{v}}\tilde{V}\right]_i^k + \int_i^k \left(\tilde{p}_x \tilde{\tilde{u}} dy + \tilde{p}_y \tilde{\tilde{v}} dx\right) = \int_i^k \left[\tilde{M}\tilde{\tilde{\chi}} + \tilde{\tilde{\varepsilon}}\left(\tilde{H}dx + \tilde{V}dy\right) - \tilde{\tilde{\varphi}}_T\left(\tilde{H}dy - \tilde{V}dx\right)ds\right]$$

Veže sljedeće relacije:

$$\tilde{H}dx + \tilde{V}dy = \tilde{N}ds \qquad \tilde{V}dx - \tilde{H}dy = \tilde{T}ds$$

pa se dobija:

$$\left[-\left(\tilde{\tilde{\varphi}} - \tilde{\tilde{\varphi}}_T\right)\tilde{M} + \tilde{\tilde{u}}\tilde{H} + \tilde{\tilde{v}}\tilde{V}\right]_i^k + \int_i^k \left(\tilde{p}_x \tilde{\tilde{u}} dy + \tilde{p}_y \tilde{\tilde{v}} dx\right) = \int_i^k \left[\tilde{M}\tilde{\tilde{\chi}} + \tilde{\tilde{\varepsilon}}\tilde{N} + \tilde{\tilde{\varphi}}_T \tilde{T}\right]ds$$

Kada ovu ispišemo za svaki štap nosača i izvršimo sabiranje tih jednačina, dobijamo:

$$\sum_s \left[-\left(\tilde{\tilde{\varphi}} - \tilde{\tilde{\varphi}}_T\right)\tilde{M} + \tilde{\tilde{u}}\tilde{H} + \tilde{\tilde{v}}\tilde{V}\right]_i^k + \sum_s \int_i^k \left(\tilde{p}_x \tilde{\tilde{u}} dy + \tilde{p}_y \tilde{\tilde{v}} dx\right) = \sum_s \int_i^k \left[\tilde{M}\tilde{\tilde{\chi}} + \tilde{\tilde{\varepsilon}}\tilde{N} + \tilde{\tilde{\varphi}}_T \tilde{T}\right]ds \qquad (7)$$

Ako uvedemo sljedeće oznake:

$$\sum_{s} \int_{i}^{k} = \int_{s}$$

$$\sum_{s} \left[-\left(\tilde{\tilde{\varphi}} - \tilde{\tilde{\varphi}}_T\right)\tilde{M} + \tilde{\tilde{u}}\tilde{H} + \tilde{\tilde{v}}\tilde{V} \right]_i^k = \sum_i \tilde{P}_i \tilde{\tilde{s}}_i + \sum_i \tilde{M}_i \left(\tilde{\tilde{\varphi}} - \tilde{\tilde{\varphi}}_T\right)_i + \sum_i \tilde{C}_{oi} \tilde{\tilde{c}}_{oi} + \sum_i \tilde{C}_{ui} \tilde{\tilde{c}}_{ui}$$

dobijamo:

$$\sum_{s} \int_{i}^{k} \left(\tilde{p}_x \tilde{\tilde{u}} dy + \tilde{p}_y \tilde{\tilde{v}} dx\right) + \sum_i \tilde{P}_i \tilde{\tilde{s}}_i + \sum_i \tilde{M}_i \left(\tilde{\tilde{\varphi}} - \tilde{\tilde{\varphi}}_T\right)_i + \sum_i \tilde{C}_{oi} \tilde{\tilde{c}}_{oi} + \sum_i \tilde{C}_{ui} \tilde{\tilde{c}}_{ui} = \int_s \left[\tilde{M}\tilde{\tilde{\chi}} + \tilde{\tilde{\varepsilon}}\tilde{N} + \tilde{\tilde{\varphi}}_T \tilde{T}\right] ds$$

Algebarski zbir radova svih spoljašnjih i unutrašnjih sila mogućeg ravnotežnog stanja jednog štapa na pomjeranjima i obrtanjima poprečnih presjeka štapa pri njegovom mogućem stanju deformacija jednak je nuli.

Kada radove aktivnih i reaktivnih spoljašnjih sila označimo na sljedeći način:

$$\sum \tilde{P}\, \tilde{\tilde{s}} = \int_s \left(\tilde{p}_x \tilde{\tilde{u}} dx + \tilde{p}_y \tilde{\tilde{v}} dy\right) + \sum_i \tilde{P}_i \tilde{\tilde{s}}_i + \sum_i \tilde{M}_i \left(\tilde{\tilde{\varphi}} - \tilde{\tilde{\varphi}}_T\right)_i$$

$$\sum \tilde{C}\tilde{\tilde{c}} = \sum_i \tilde{C}_{oi} \tilde{\tilde{c}}_{oi} + \sum_i \tilde{C}_{ui} \tilde{\tilde{c}}_{ui}$$

dobijamo jednačinu koja predstavlja osnovnu vezu mogućućeg ravnotežnog stanja i mogućeg stanja deformacije nosača:

$$\sum \tilde{P}\tilde{\tilde{s}} + \sum \tilde{C}\tilde{\tilde{c}} = \int_s \left[\tilde{M}\tilde{\tilde{\chi}} + \tilde{\tilde{\varepsilon}}\tilde{N} + \tilde{\tilde{\varphi}}_T \tilde{T}\right] ds$$

Kada u ovu jednačinu unesemo reakcije i sile u presjecima koje se pod datim opterećenjem javljaju, a uticaje mogućeg stanja deformacija označimo crtom dobijamo relaciju:

$$\sum P\bar{s} + \sum C\bar{c} = \int_s \left[M\bar{\chi} + N\bar{\varepsilon} + T\bar{\varphi}_T\right] ds \tag{8}$$

koja prikazuje **princip virtualnih pomjeranja**.

Kada za moguće stanje deformacije unesemo pomjeranja i deformacijske veličine koje se u nosaču javljaju, a uticaje mogućeg ravnotežnog stanja umjesto talasa označimo crtom, dobijamo relaciju:

$$\sum \bar{P}s + \sum \bar{C}c = \int_s \left[\bar{M}\chi + \bar{N}\varepsilon + \bar{T}\varphi_T\right] ds \tag{9}$$

koja prikazuje **princip virtualnih sila**.

Primjenom principa virtualnih pomjeranja može da se sračuna sve ono što može da se sračuna iz uslova ravnoteže (1) i (2), a primjenom principa virtualnih sila može da se izračuna sve ono što može da se izračuna iz deformacijskih uslova, tj jednačina (3) i (4).

Za sistem krutih tijela sve deformacijske veličine su jednake nuli pa matematička formulacija principa virtualnih pomjeranja i principa virtualnih sila glasi:

$$\sum P\bar{s} + \sum C\bar{c} = 0 \tag{10}$$

$$\sum \bar{P}s + \sum \bar{C}c = 0 \tag{11}$$